

Operations Research

Standortproblem (Steiner-Weber-Problem)

bearbeitet von

Carsten Appenheimer

Stephan Plath

1 Inhaltsverzeichnis

1	INHALTSVERZEICHNIS	2
2	STANDORTPROBLEM.....	3
2.1	VORBEMERKUNG	3
2.2	BERECHNUNG DURCH FIXPUNKTITERATION	3
2.2.1	Zielfunktion.....	3
2.2.2	Schwerpunktkoordinaten.....	4
2.2.3	Iterationsvorschrift	4
2.3	BERECHNUNG DURCH SIMULATION	5
2.4	BEISPIEL ZUR BERECHNUNG DURCH ITERATION	5
2.5	ANWENDUNGSBEISPIELE.....	7
2.5.1	Plazierung von Maschinen oder elektronischen Bauteilen	7
2.5.2	Abfallentsorgung.....	7
2.5.3	Verkehrsplanung	7
2.5.4	Bestimmung eines Tagungsortes.....	7
3	BENUTZERANLEITUNG	8
3.1	EINGABEFENSTER	8
3.2	AUSGABEFENSTER	9
3.3	MENÜ	10
3.3.1	Dateiarbeit	10
3.3.2	Optionen.....	11
3.3.3	Grafik darstellen.....	12

2 Standortproblem

2.1 Vorbemerkung

In vielen ökonomischen Bereichen ist es notwendig, zur Vorbereitung einer Investitionsentscheidung mittels mathematische Methoden die kostenoptimale Lösung zu finden. Ein Entscheidungskriterium bei der **Investitionsplanung** ist die Wahl des Standortes. So ist zum Beispiel die Wahl des Standortes eines Zentrallagers einer großen Kaufhauskette eine solche Anwendung. Die Filialen der Kaufhauskette sind über eine große Region verteilt, wobei jede Filiale angesichts ihrer Verkaufszahlen unterschiedliche Mengen dem Zentrallager abnimmt (Gewichtung der Standorte). Dabei ist der Standort gesucht, der in der Folge einen minimalen Gesamtaufwand der Transporte zu den Filialen sichert. Der Standort muß nicht mit Filialstandorten übereinstimmen.

Das Standortproblem (**Steiner-Weber-Problem**) läßt sich durch Anwendung eines Iterationsalgorithmus lösen.

2.2 Berechnung durch Fixpunktiteration

Der Algorithmus zur Lösung des Steiner-Weber-Problems zeichnet sich dadurch aus, daß für den Iterationseinstieg ein Startwert erzeugt wird, der eine zulässige Lösung darstellt. Der Startwert entspricht dem Schwerpunkt des Systems und läßt sich wie folgt berechnen.

2.2.1 Zielfunktion

$$Z = f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \Rightarrow \min$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \cdot r_i$$

mit $r_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}$

x_i, y_i : Koordinaten der Standorte,

a_i : Gewichtung der Standorte (für $i=1, 2, \dots, n$) und

n : Anzahl der Standorte

2.2.2 Schwerpunktkoordinaten

$$x^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n a_i} \quad y^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

Die Schwerpunktkoordinaten bilden die Startwerte der folgenden Iterationsvorschrift.

2.2.3 Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{a_i \cdot x_i}{r_i(x^{(k)}, y^{(k)})}}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{r_i(x^{(k)}, y^{(k)})}}$$
$$y^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{a_i \cdot y_i}{r_i(x^{(k)}, y^{(k)})}}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{r_i(x^{(k)}, y^{(k)})}}$$

für $k = 1, 2, 3 \dots$

Bei der Durchführung der Iteration verbessert sich der Wert der Zielfunktion schrittweise. Die iterative Verbesserung wird durch ein geeignetes Abbruchkriterium ε beendet, wobei ε eine beliebig festgelegte Größe ist. ε ist die Differenz der Werte der Zielfunktion zweier aufeinanderfolgender Koordinatenpaare.

2.3 Berechnung durch Simulation

Ein alternatives Verfahren zur Bestimmung des optimalen Standortes stellt die **stochastische Simulation** dar. Die Anwendung der Simulation ist meistens nur sinnvoll, wenn die **analytische Modellierung** versagt oder zu kompliziert ist. In unserem Fall wird die Simulation genutzt, um die Unterschiede zur analytischen Lösung zu veranschaulichen.

Zur Ermittlung des optimalen Standortes werden schrittweise zufällig gewählte Koordinaten in die Zielfunktion eingesetzt. Ist der Wert der Zielfunktion kleiner als der bisherige, wurde ein besserer Standort gefunden. Daraus folgt, daß die Qualität des Ergebnisses in Abhängigkeit von der Anzahl der Versuche wächst, d.h. zur Bestimmung eines Standortes der dem optimalen Standort nahek kommt, ist eine hohe Anzahl von Simulationsläufen nötig.

2.4 Beispiel zur Berechnung durch Iteration

Gegeben sind die Orte mit den folgenden Koordinaten:

Ort	Koordinaten		Gewicht
	x	y	
A	3	8	3
B	9	8	6
C	8	3	7
D	3	4	4

Tabelle 1: Aufgabe, Skript Operations Research, S. 5

Die Schwerpunktkoordinaten haben folgende Werte:

Koordinaten		Zielfunktion
$x^{(0)}$	$y^{(0)}$	$Z = f(x^{(0)}, y^{(0)})$
6,55	5,45	69,5976

Tabelle 2: Schwerpunktkoordinaten

Bei einer absoluten Genauigkeit von $\epsilon = 0.0001$ ergeben sich folgende Werte für die Iterationsschritte:

Iterationsschritt i	Koordinaten		Zielfunktion
	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$Z = f(x^{(i)}, y^{(i)})$
1	6.8189	5.202	68.9944
2	6.9433	5.0609	68.824
3	7.0015	4.9719	68.7665
4	7.0309	4.9138	68.7443
5	7.0474	4.8755	68.7349
6	7.0575	4.8501	68.7309
7	7.0639	4.8331	68.7291
8	7.0682	4.8218	68.7283
9	7.0711	4.8142	68.7279
10	7.0731	4.8091	68.7278
11	7.0744	4.8056	68.7277

Tabelle 3: Iterationsschritte

Der optimale Standort liegt bei den Koordinaten (7.0744;4.8056) mit einem Aufwand Z von 68.7277.

2.5 Anwendungsbeispiele

2.5.1 Platzierung von Maschinen oder elektronischen Bauteilen

Die Planung einer Maschinenhalle, in der eine neue Maschine aufgestellt werden soll, stellt ein typisches Standortproblem dar. Dabei stehen vorhandene Maschinen auf existierenden Standorten, die mit der neu aufzustellenden Maschine interagieren. Bei der Modellierung dieses Problems werden die Interaktionen über die Gewichte beschrieben.

2.5.2 Abfallentsorgung

Eine weitere wichtige Anwendung der Standorttheorie ist die Planung von "unerwünschten Anlagen" wie z.B. Müllverbrennungsanlagen. Bei dieser Art von Problemen ist es fast nie ausreichend, nur eine Zielfunktion zu betrachten. Hier sind z.B. mindestens die Zielfunktionen "Kosten" und "Umweltbelastung" zu berücksichtigen, wobei die Umweltbelastung bei Aufteilung in verschiedene Belastungsfaktoren wieder zu verschiedenen Zielfunktionen führt. Ohne einen solchen **multikriteriellen Ansatz** ist die Standorttheorie als Modell für diese Probleme ungeeignet.

2.5.3 Verkehrsplanung

Am Beispiel der Linienplanung eines öffentlichen Personennahverkehrsunternehmens wird ein weiteres Problem bei der Modellierung von Standortproblemen deutlich. In diesem Fall kann ein "neuer Standort", also beispielsweise eine neue Buslinie im Liniennetz des Unternehmens, durch einen Punkt nicht realistisch beschrieben werden. Gesucht ist vielmehr ein "geeigneter" Weg in einem Straßennetzwerk, es handelt sich also um ein sogenanntes **Path Location Problem**.

Über diese Problemklasse ist in diesem Zusammenhang bisher wenig bekannt, obwohl es besonders im erwähnten Verkehrsbereich vielfache Anwendungen gibt. Eine Lösung dieses Problems ist mit dem beschriebenen Verfahren zur Fixpunktiteration nicht hinreichend möglich.

2.5.4 Bestimmung eines Tagungsortes

Eine weiteres Anwendungsgebiet ist die Bestimmung eines Tagungsortes. Bei diesem Standortproblem sind die Fahrtkosten zu berücksichtigen, d.h. es ist der Standort gesucht, der insgesamt die geringsten Reisekosten verursacht. Als Gewichtung kann in diesem Fall die Anzahl der Tagungsteilnehmer aus den verschiedenen Orten eingehen.

3 Benutzeranleitung

3.1 Eingabefenster

Die Eingabe der Daten erfolgt in der Tabelle „**Beteiligte Orte**“. In den Eingabefeldern können reelle Zahlen von 0 bis 999999 eingegeben werden. Die Eingabe wird mit der „**Enter**“-Taste bestätigt. Nach der Eingabe einer neuen Zahl wird eine neue Berechnung des optimalen Standorts durchgeführt.

Soll ein neuer Ort eingegeben werden, erfolgt dies mit der „**Einf**g“-Taste, wobei dieser hinter dem aktuellen Ort eingefügt wird. Das Löschen des aktuellen Ortes geschieht mittels der „**Entf**“-Taste.

beteiligte Orte			
Ort	Koordinaten		Gewicht
	x	y	a
1.	3	8	3
2.	9	8	6
3.	8	3	7
4.	3	4	4
Einf/Entf Ort einfügen/löschen			

Abbildung 1: Eingabefenster

3.2 Ausgabefenster

Die Ergebnisse der Iterationsschritte bzw. der Simulationsdurchläufe werden im Ausgabefenster angezeigt. Die Werte des optimalen Standorts werden in der letzten Zeile des Fensters ausgegeben. Falls nicht alle Ergebnisse im Fenster dargestellt werden, können diese sichtbar gemacht werden, indem die Tabelle mit den Cursor-Tasten durchlaufen wird.

Zwischen Eingabe- und Ausgabefenster kann mit der „Tab“-Taste gewechselt werden.

Standort: Iteration			
	Koordinaten		Kosten
	x	y	$Z(x,y)$
1.	6.55	5.45	69.5976
2.	6.8189	5.202	68.9944
3.	6.9433	5.0609	68.824
4.	7.0015	4.9719	68.7665
5.	7.0309	4.9138	68.7443
6.	7.0474	4.8755	68.7349
7.	7.0575	4.8501	68.7309
8.	7.0639	4.8331	68.7291
9.	7.0682	4.8218	68.7283
10.	7.0711	4.8142	68.7279
10.	7.0711	4.8142	68.7279

↑↓ Bewegen

Abbildung 2: Ausgabefenster

3.3 Menü

Das Menü wird mit der „F10“-Taste aktiviert. Mittels des Menüfensters kann auf die folgenden Funktionen zurückgegriffen werden.

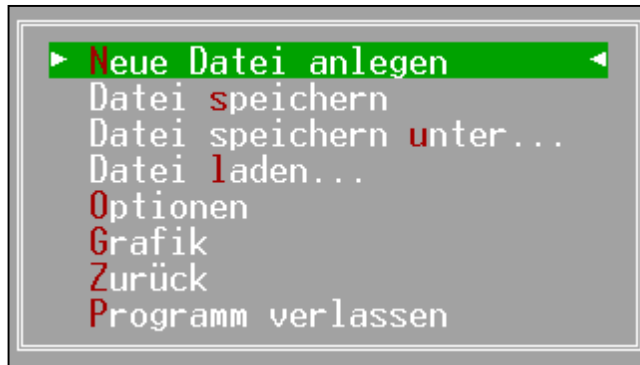


Abbildung 3: Menüfenster

3.3.1 Dateiarbeit

Das Menü stellt die folgenden Funktionen zur Dateiarbeit zur Verfügung:

- Neue Datei anlegen
- Datei speichern
- Datei speichern unter ...
- Datei laden

Die Daten aus dem Eingabefenster lassen sich in eine Datei speichern bzw. aus einer Datei laden. Die Dateien bekommen automatisch die Dateiendung „ORF“ und werden in dem Verzeichnis gespeichert indem das Programm gestartet wurde.

3.3.2 Optionen

Im Optionsfenster wird ausgewählt, ob der optimale Standort durch die Fixpunktiteration oder durch Simulation bestimmt werden soll. In Abhängigkeit vom Berechnungsverfahren kann die Genauigkeit der Berechnung festgelegt werden.

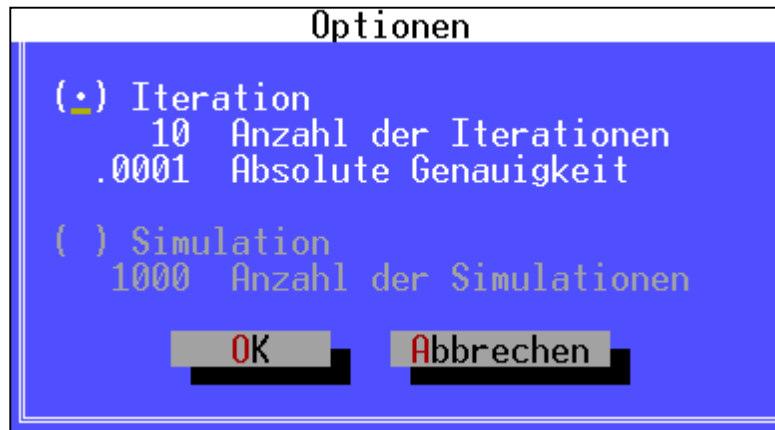


Abbildung 4: Optionsfenster

Das Abbruchkriterium bilden bei der iterativen Berechnung die Anzahl der Iterationsschritte und die absolute Genauigkeit der Zielfunktion, d. h. die Iteration wird abgebrochen, wenn die Anzahl der Iterationen erreicht ist oder die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zielfunktionswerten geringer als die absolute Genauigkeit ist. Die Simulation bricht bei der erreichten Anzahl der Simulationsschritte ab.

3.3.3 Grafik darstellen

3.3.3.1 2D-Darstellung



Abbildung 5: 2D-Grafikpanel

Bei der grafischen Auswertung ist der Wechsel zwischen Simulation und Iteration möglich. Um die grafische Darstellung anzupassen, sind verschiedene Optionen verfügbar.

Schaltflächen:

- „Neu Berechnen“ ist vor allen Dingen bei der Simulation sinnvoll, um eine neue Simulation durchzuführen.
- „3D-Darstellung“ wechselt zur Darstellung der Zielfunktion im 3D-Modus.
- „Zurück“ wechselt zur Eingabeebene.

3.3.3.2 3D-Darstellung



Um die grafische Darstellung anzupassen, sind verschiedene Optionen unter dem Stichwort „Darstellung“ verfügbar.

Schaltflächen:

- „2D-Darstellung“ wechselt zur Darstellung im 2D-Modus.
- „Zurück“ wechselt zur Eingabeebene.

Abbildung 6: 3D-Grafikpanel